第十四屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A 參考答案（初一組）

一、填空(每題 10 分, 共 80 分)

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$10\frac{4}{9}$	$2(a-b)$	$3n$	3.75	②	$-2.5\le m+n\le 10.5$	$3\frac{1003}{1004}$	34

二、解答下列各題 (每題10分, 共40分, 要求寫出簡要過程)

9. 答案：$19 \leqslant x<19\frac{1}{3}$.

解答.

$$[2x]+1+[3x]+1>2x+3x \geqslant [2x]+[3x] \Rightarrow 97>5x\geqslant 95 \Rightarrow 19\leqslant x<19\frac{2}{5} \cdot \qquad (1)$$

令 $x=19+\alpha$ $\left(0\leqslant\alpha<\frac{2}{5}\right)$, 則

$$[2x]+[3x]=38+[2\alpha]+57+[3\alpha]=95+[2\alpha]+[3\alpha]=95.$$

$$[2\alpha]+[3\alpha]=0,\ \therefore 0\leqslant 2\alpha<1,\ 0\leqslant 3\alpha<1 \Rightarrow 19\leqslant x<19\frac{1}{3}.$$

即解爲 $19\leqslant x<19\frac{1}{3}$ ·

<u>評分參考</u>: 1) 列出(1)最終不等式的一個得 3 分, 共 6 分; 2) 解出正確答案得 4 分.

10. 答案：9.

解答. 因爲 $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{10-x}{10x}$, 所以

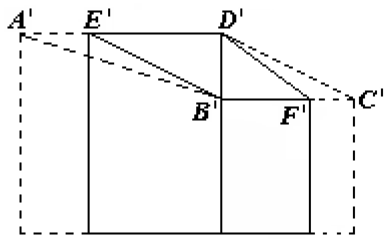
$$y=\frac{10x}{10-x}=\frac{10}{\frac{10}{x}-1}.$$

所以當 x 從 1 取到 9 時, y 增大, x 不能取 10, x 取 11 及 11 以後的自然數時, $y<0$. 可知 $x=9$ 時, y 最大, 爲 90.

評分參考: 1) 給出等式變形得 3 分; 2) 給出正確答案得 3 分; 3) 給出正確討論得 4 分.

11. 答案：6

解答. 如下圖, 我們考慮兩個相鄰的長方形, 把兩個長方形分別擴展爲兩個正方形.



則圖中的

$$S_{\Delta A'B'D'}+S_{\Delta B'C'D'}=\frac{1}{2}(A'D'+B'C')\times B'D'=\frac{1}{2}(A'D'+B'C')(A'D'-B'C')=\frac{1}{2}(A'D'^2-B'C'^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}(\text{大長方形面積}-\text{小長方形面積})=\frac{3}{4}(\text{大長方形面積}-\text{小長方形面積}).$$

而圖中

$$\text{四邊形 } E'B'F'D' \text{ 的面積}=\frac{2}{3}(S_{\Delta A'B'D'}+S_{\Delta B'C'D'})=\frac{1}{2}(\text{大長方形面積}-\text{小長方形面積}).$$

故題中的四邊形 *CDGF* 的面積與四邊形 *FGQP* 的面積之和爲

$$\frac{1}{2}\big((\text{大長方形面積}-\text{中長方形面積})+(\text{中長方形面積}-\text{小長方形面積})\big)$$

$$=\ \frac{1}{2}(\text{大長方形面積}-\text{小長方形面積})\ =\frac{1}{2}(17-5)=6.$$

評分參考: 1) 給出正確討論得 6 分; 2) 給出正確答案得 4 分.

12. 答案：$1\frac{123}{128}$

解答. 設第 i 行、第 j 列小方格中的數爲 a_{ij}, 第 i 行從左起第 2 列開始, 每個格子中的數與其左邊格子中的數之差爲 d_i. 由題目條件, 對於第 4 行, 有

$$\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=a_{44}-\frac{3}{16},\ \therefore a_{44}=\frac{1}{4}\quad \text{且}\quad d_4=\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=\frac{1}{16}. \qquad (1)$$

對於第 4 列, 有

$$\frac{a_{34}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{a_{34}}, \ \therefore a_{34}=\frac{1}{2} \ \text{且} \ q=\frac{a_{34}}{1}=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

於是有

$$a_{41}=\frac{1}{16}, \ a_{42}=\frac{1}{8}, \ a_{43}=\frac{3}{16}, \ a_{44}=\frac{1}{4}, \ a_{45}=\frac{5}{16}, \ a_{46}=\frac{3}{8}, \ a_{47}=\frac{7}{16}, \ a_{48}=\frac{1}{2}, \qquad (3)$$

$$a_{11}=\frac{a_{41}}{q^3}=\frac{1}{2}, \ a_{22}=\frac{a_{42}}{q^2}=\frac{1}{2}, \ a_{33}=\frac{a_{43}}{q}=\frac{3}{8},$$

$$a_{55}=\frac{5}{32}, \ a_{66}=\frac{3}{32}, \ a_{77}=\frac{7}{128}, \ a_{88}=\frac{1}{32}.$$

所以主對角線上的 8 個數之和爲$1\frac{123}{128}$.

<u>評分參考</u>: 1) 討論到(1)得 2 分, (2)得 2 分, (3)得 2 分; 2) 給出正確答案得 4 分.

三、解答下列各題 (每題15分，共30分，要求寫出詳細過程)

13. 答案：1740.

解答. 從 1 開始數, 第一輪去掉的點是

I: 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106, 113, ⋯, 7k+1, ⋯, 2003,

一共有 $\frac{2009}{7}-1=286$ (個), 則餘下的點有 $2009-286=1723$ (個).

第二輪從第一輪裏最後去掉的 2003 開始數, 去掉的點是

II: 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 58, 66, 74, 82, 90, 98, 107, 115, ⋯.

可見, II 中的數從第二個數開始

1) 每 6 個數爲一段, 6 個數依次間隔爲 7;

2) 每段末的數與下一段初的數間隔爲 8;

3) 每段末的數依次爲: 49, 98, 147, ⋯, 49*k*, ⋯, 2009.

由此可知，第二輪中去掉的點的個數是

$$1+\frac{2009}{49}\times 6=1+41\times 6=247 .$$

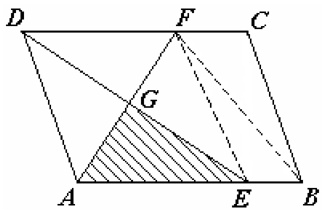
由 $247+286>500, 500-286=214$，可知第 500 次去掉的點就是第二輪中去掉的第 214 個點. 因爲 $213=35\times 6+3$，所以第二輪中去掉的第 214 個點的號碼是

$$\left[\frac{213}{6}\right]\times 49+9+2\times 8=1740 .$$

__評分參考__: 1) 給出正確答案得 3 分; 2) 討論清楚第一輪去掉的點得 4 分; 3) 討論清楚第二輪去掉的點得 4 分; 4) 最後的討論部分得 4 分.

14. 答案： $\dfrac{(a+b)d^2}{2(c+d)(ad+bc+2bd)}$.

解答. 連接 EF , BF, 得到下圖.



由三角形面積公式可以得到:

$$\frac{S_{\Delta FCB}}{S_{\Delta DFE}}=\frac{a}{b},\ \frac{S_{\Delta EBF}}{S_{\Delta AEF}}=\frac{c}{d} .$$

進而得到

$$\frac{S_{\Delta FCB}+S_{\Delta DFE}}{S_{\Delta DFE}}=\frac{S_{\Delta FCB}}{S_{\Delta DFE}}+1=\frac{a+b}{b},\ \frac{S_{\Delta EBF}+S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta AEF}}=\frac{S_{\Delta EBF}}{S_{\Delta AEF}}+1=\frac{c+d}{d} .$$

因爲 $S_{\Delta FCB}+S_{\Delta DBF}$ 與 $S_{\Delta EBF}+S_{\Delta AEF}$ 相等並且都是四邊形 $ABCD$ 的面積的一半，所以

$$S_{\Delta DFE}=S_{\Delta DFG}+S_{\Delta EFG}=\frac{b}{2(a+b)},\ S_{\Delta AEF}=S_{\Delta AEG}+S_{\Delta EFG}=\frac{d}{2(c+d)} . \quad (1)$$

再由三角形面積公式可以得到 $\dfrac{S_{\Delta AEG}}{S_{\Delta EFG}}=\dfrac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta DFG}}$，進而

$$\frac{S_{\Delta AEG}}{S_{\Delta EFG}+S_{\Delta AEG}}=\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta DFG}+S_{\Delta ADG}}.$$

又 $S_{\Delta AEG}+S_{\Delta EFG}=S_{\Delta AEG}+S_{\Delta ADG}$，即 $S_{\Delta EFG}=S_{\Delta ADG}$，所以

$$\frac{S_{\Delta AEG}}{S_{\Delta AEF}}=\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta DEF}}=\frac{S_{\Delta AEF}-S_{\Delta AEG}}{S_{\Delta DEF}}.$$

於是得到

$$\frac{S_{\Delta AEG}}{\frac{d}{2(c+d)}}=\frac{\frac{d}{2(c+d)}-S_{\Delta AEG}}{\frac{b}{2(a+b)}}. \qquad (2)$$

因此

$$S_{\Delta AEG}\left[\frac{b}{2(a+b)}+\frac{d}{2(c+d)}\right]=\frac{d^2}{4(c+d)^2},$$

即

$$S_{\Delta AEG}=\frac{d^2}{4(c+d)^2}\times\frac{2(a+b)(c+d)}{b(c+d)+d(a+b)}=\frac{(a+b)d^2}{2(c+d)(ad+bc+2bd)}.$$

<u>**評分參考**</u>: 1) 畫出輔助線得 2 分; 2) 討論到(1)式得 4 分; 3) 討論到(2)式得 6 分; 4) 得到正確答案得 3 分.